مثال 5 ص 318

لنفترض انه يطلب تعيين المنحني الواصل بين النقطتين M_0 و M_1 في المستوي oxy بحيث يشكل سطحاً ذا مساحة صغرى عند تدويره حول ox

الحل: تعيين مساحة هذا السطح بالتكامل

$$S = 2\pi\int_{M_0}^{M_1} y\sqrt{dx^2+dy^2} = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

وبغض النظر عن العامل 2π تصبح المسألة هي إيجاد القيمة الصغرى للتكامل:

$$J=\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad (1)$$

من المسألة المعطاة لدينا التابع المكامل

$$F(x,y,y') = y\sqrt{1+y'^2} \quad (2)$$

لا يحوي المتحول x ومن ثم التكامل الاول لمعادلة اولر هو

[redacted]

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0$$

$$F - y'F_{y'} = C_1 \quad (3)$$

C_1 ثابت كيفي . من (2)

$$F_{y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

نعوض قيمة F و F' في (3)

$$y\sqrt{1+y'^2} - \frac{y\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

$$y(1+y'^2) - y\,y'^2 = C_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$y = C_1\sqrt{1+y'^2}$$

$$y^2 = C_1^2(1+y'^2)$$

$$1+y'^2 = \frac{y^2}{C_1^2}$$

$$y'^2 = \frac{y^2}{C_1^2} - 1 \Rightarrow y'^2 = \frac{y^2 - C_1^2}{C_1^2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-C_1^2}}{C_1}$$

$$\frac{C_1\,dy}{\sqrt{y^2-C_1^2}} = dx$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \operatorname{arc\,ch}\frac{x}{a}$$

نكامل

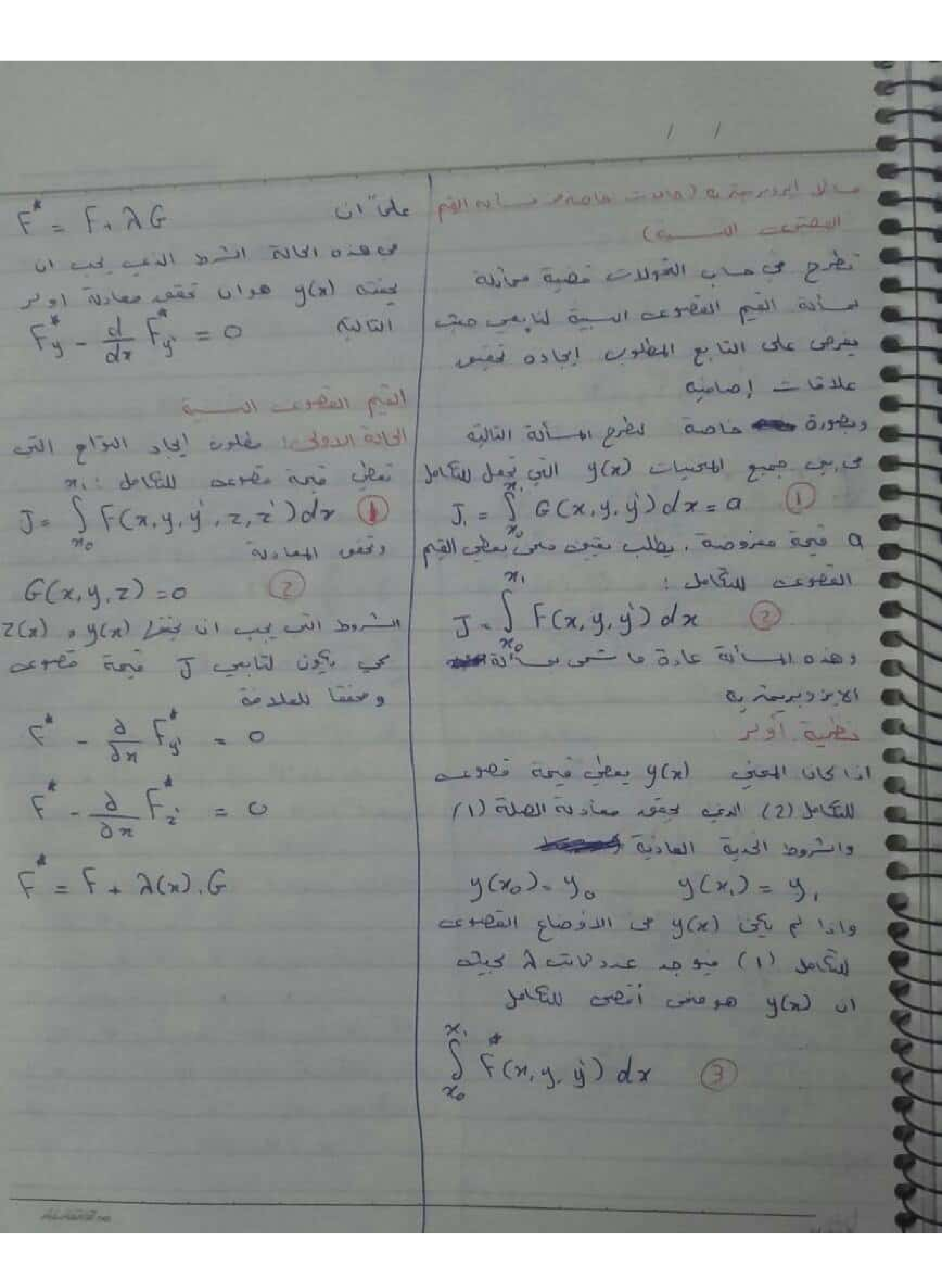
$$C_1 \operatorname{arc\,ch}\frac{y}{C_1} = x - C_2$$

$$\operatorname{arc\,ch}\frac{y}{C_1} = \frac{x-C_2}{C_1}$$

$$\frac{y}{C_1} = \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$$

$$y(x) = C_1 \cdot \operatorname{ch}\frac{x-C_2}{C_1}$$

فالمنحنيات المطلوبة هي اسرة السلاسل محاورها التناظرية موازية للمحور oy علماً ان C_1, C_2 ثابتان كيفيان يتحددان من الشروط الحدية المعطاة



مسائل البرمجة مع (معادلات خاصة من مسائل القيم القصوى النسبية)

تطرح من حساب التحولات قضية مماثلة لمسألة القيم القصوى النسبية لتابعي حيث يفرض على التابع المطلوب إيجاده تحقيق علاقات إضافية

وبصورة خاصة نطرح المسألة التالية
من بين جميع المنحنيات $y(x)$ التي تجعل للتكامل

$$J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')\,dx = a \quad (1)$$

a قيمة مفروضة، يطلب تعيين منحنى يعطي القيم القصوى للتكامل:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\,dx \quad (2)$$

وهذه المسألة عادة ما تسمى بمسألة الايزوبريمترية

نظرية أولر

اذا كان المنحني $y(x)$ يعطي قيمة قصوى للتكامل (2) الذي يحقق معادلة الصلة (1) والشروط الحدية العادية

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

واذا لم يكن $y(x)$ من الأوضاع القصوى للتكامل (1) فيوجد عدد ثابت λ بحيث ان $y(x)$ هو منحنى أقصى للتكامل

$$\int_{x_0}^{x_1} F^*(x, y, y')\,dx \quad (3)$$

علماً ان

$$F^* = F + \lambda G$$

في هذه الحالة الشرط الذي يجب ان يحققه $y(x)$ هو ان تحقق معادلة اولر التالية

$$F^*_y - \frac{d}{dx} F^*_{y'} = 0$$

القيم القصوى النسبية

الحالة الأولى: مطلوب إيجاد التوابع التي تعطي قيمة قصوى للتكامل:

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', z, z')\,dx \quad (1)$$

وتحقق المعادلة

$$G(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

الشروط التي يجب ان يحققها $y(x)$ و $z(x)$ كي يكون لتابعي J قيمة قصوى وفقاً للعلاقة

$$F^* - \frac{\partial}{\partial x} F^*_{y'} = 0$$

$$F^* - \frac{\partial}{\partial x} F^*_{z'} = 0$$

$$F^* = F + \lambda(x) . G$$

مثال(1) المطلوب إيجاد من بين جميع المنحنيات
التي طول كل منها ℓ ~~[illegible]~~ والواصلة
بين نقطتين مفروضتين A و B المنحني
الذي يحدد مع المستقيم AB مساحة أعظمية

الحل:

لنأخذ المستقيم AB كمحور لـ x ولتكن x_0
و x_1 فاصلتي النقطتين A و B ولنفرض ان y
من اجل المنحني المطلوب هو تابع لـ x أي $y=y(x)$
وحيد القيمة في المجال $[x_0, x_1]$ عندئذ ترجع
المسألة المعطاة الى ايجاد القيمة الاعظمية
للتكامل

$$J=\int_{x_0}^{x_1} y\,dx \qquad (1)$$

على ان يحقق معادلات الصلة

$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=\ell \qquad (2)$$

ان التكامل الأخير المعرف بالعلاقة (2) يعطي
طول المنحني $y=y(x)$ الواصل بين
النقطتين $x=x_0$ و $x=x_1$ ومشتقاته
المفروضة هي ضمناً مستمرات
ويمكن في الحال التحقق من ذلك بتشكيل
معادلة أولر لهذا التكامل
اذا كان $\ell < x_1-x_0$ فلا يوجد اي منحني
يحقق العلاقة (2) واذا كان:
$\ell = x_1-x_0$ فلا يتحقق الشرط (2)
إلا بالمستقيم AB فليس للمسألة معنى
في كلتا الحالتين لذا سنفرض فيما يلي أن

$$x_1-x_0<\ell$$

وفي حالتنا هذه لدينا

$$F=y \qquad G=\sqrt{1+y'^2}$$

$$F^* = F+\lambda(x)\,G = y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$$

ونلاحظ ان F^* لا تحوي x لذا فإن
التكامل الاول لمعادلة اولر الموافقة هو

$$F^* - y'F^*_{y'} = b \qquad (3)$$

علماً ان b ثابت كيفي ومن جهة اخرى
لدينا

$$(4)\quad F^*_{y'} = \frac{\partial F^*}{\partial y'} = \frac{2\lambda y'}{2\sqrt{1+y'^2}} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

معادلة اولر (3) تأخذ الشكل التالي

$$y+\lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = b$$

نضرب طرفي المعادلة الأخيرة بـ $\sqrt{1+y'^2}$
نحصل على

$$(y-b)\sqrt{1+y'^2} = -\lambda$$

$$(y-b)^2(1+y'^2) = -\lambda$$

$$y'^2 = \frac{\lambda^2-(y-b)^2}{(y-b)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}}{y-b}$$

$$\frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}} = dx$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{-2(y-b)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}} = dx$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2} = x-a$$

$$-\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2} = x-a$$

$$\lambda^2-(y-b)^2 = (x-a)^2$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = \lambda^2$$

اعني ان المنحنيات المطلوبة هي دوائر انصاف اقطارها $|\lambda|$

مثال 2 ص335

يطلب تعيين وضع التوازن تحت تأثير الجاذبية الارضية لوتر ثقيل متجانس طوله وطرفاه مثبتان . لنعتبر ان الجاذبية الارضية متجهة بالاتجاه السالب لمحور التراتيب

يعين وضع التوازن من شرط كون مركز ثقل الوتر في اخفض وضع ممكن

ونعتبر انه في الواقع ان اي مستقيم موازي لمحور التراتيب لا يقطع الوتر في اكثر من نقطة

صيغة رياضية للسؤال

لتكن لدينا التابع $\int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx$

المطلوب ايجاد المنحني $y(x)$ الذي يحقق معادلة الصلة $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell$

والشروط الحدية

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1$$

هذه المسألة ترجع الى ايجاد القيمة الصغرى للتكامل

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y\,ds = \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx \quad (1)$$

على ان يخضع الى معادلة الصلة

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2}\,dx = \ell \quad (2)$$

والشروط الحدية

$$y(x_0) = y_0 \qquad y(x_1) = y_1 \quad (3)$$

من المسألة المعطاة لدينا

$$F = y\sqrt{1+y'^2} \qquad G = \sqrt{1+y'^2}$$

$$F^* = F + \lambda G = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

نلاحظ ان F^* لا تحوي x لذا فان التكامل الاول لمعادلة اولر الموافقة هو

$$F^* - y' F^*_{y'} = a \quad (4)$$

a ثابت كيفي ومن جهة اخرى لدينا

$$F^* = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$$

$$F^*_{y'} = \frac{\partial F^*}{\partial y'} = \frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ومن معادلة اولر (4) تأخذ الشكل

$$y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - \frac{yy'^2+\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = a$$

نضرب طرفي المعادلة الاخيرة بـ $\sqrt{1+y'^2}$

$$y(1+y'^2) + \lambda(1+y'^2) - yy'^2 - \lambda y'^2 = a\sqrt{1+y'^2}$$

بإصلاح هذه العلاقة وحلها بالنسبة لـ y'

$$(1+y'^2)(y+\lambda) - y'^2(y+\lambda) = a\sqrt{1+y'^2}$$

$$(y+\lambda) = a\sqrt{1+y'^2} \Rightarrow (y+\lambda)^2 = a^2(1+y'^2)$$

$$y'^2 = \frac{(y+\lambda)^2 - a^2}{a^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - a^2}}{a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - a^2}}{a}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - a^2}} = \frac{dx}{a}$$

$$\text{arc ch}\,\frac{y+\lambda}{a} = \frac{x}{a} + b$$

$$y + \lambda = a.ch\left(\frac{x}{a} + b\right) \quad (5) \quad a>0$$

أي ان لا a وضع المنحنى من ... لات لتحديد الثوابت (a, b, λ) من الشروط الحدية (3) في العلاقة (5) نحصل على

$$y_0 + \lambda = a.ch\left(\frac{x_0}{a} + b\right)$$

$$y_1 + \lambda = a.ch\left(\frac{x_1}{a} + b\right)$$

ونطرح احد الشرطين الحديين من الآخر وبتحويل الفرق بين جيبي التمام الزائدية الى جداء نحصل على

$$y_1 - y_0 = a.ch\left(\frac{x_1}{a} + b\right) - a.ch\left(\frac{x_0}{a} + b\right)$$

$$y_1 - y_0 = 2a\,sh\mu.sh\nu \quad (6)$$

علماً ان $\mu = \frac{x_1 + x_0}{2a} + b$ ، $\nu = \frac{x_1 - x_0}{2a}$

وبعد تعويض y' من العلاقة (5) في الشرط (2) نحصل على

$$a\left[sh\left(\frac{x_1}{a} + b\right) - sh\left(\frac{x_0}{a} + b\right)\right] = \ell \quad (7)$$

او

$$2a\,ch\mu\,sh\nu = \ell$$

بقسمة العلاقتين (6) و (7) نحصل على

$$th\mu = \frac{y_1 - y_0}{\ell} \quad (8)$$

وبما ان العدد ℓ يجب ان يحقق وضوحاً المتراجحة

$$\ell > \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} > |y_1 - y_0|$$

فإن للمعادلة (8) جذراً وحيداً ومن جهة أخرى نحصل من (6) و (7) على

$$\sqrt{\ell^2 - (y_1 - y_0)^2} = 2a\,sh\nu$$

بالاستفادة من $\nu = \frac{x_1 - x_0}{2a}$ ، $2a = \frac{x_1 - x_0}{\nu}$

$$\frac{sh\nu}{\nu} = \frac{\sqrt{\ell^2 - (y_1 - y_0)^2}}{x_1 - x_0} \quad (9)$$

بالتالي sh تابع طردي تزايد في (1) الى $+\infty$ في المجال $0 \leq x \leq \infty$ ويأخذ كل قيمة اكبر من الواحد مرة ومرة فقط

بالتالي للمعادلة (9) جذر موجب وحيد

من العلاقة $\nu = \frac{x_1 - x_1}{2a}$ تتحدد a

a اصبحت معلومة. ومن العلاقة (8) تتحدد μ

و b تتحدد من العلاقة $\mu = \frac{x_1 + x_0}{2a} + b$

وبالتالي تتحدد λ نبدلها في (8) تم المطلوب

/ /

الشروط الحدية الطبيعية

لمسألة على الشكل

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx \quad (1)$$

المطلوب: إيجاد المنحني $y(x)$ كي يكون للتابع

J قيمة عظمى ويحقق الشرط الحدي

$$y(x_0) = y_0$$

والشرط الحدي الطبيعي

$$F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0 \quad (2)$$

في حالة التابعي

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx$$

الشرطين الحديين الطبيعيين

في هذه الحالة يعطيان على الشكل

$$F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''} = 0 \qquad F_{y''} = 0 \quad (3)$$

والشروط الحدية الأولى

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y'_0$$

مثال: ليكن التابع

$$J = \int_0^1 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx \quad ①$$

المطلوب: إيجاد التابع $y(x)$

الذي يحقق الشرط الحدي $y(0) = 1$ ②

والشرط الحدي الطبيعي $F_{y'}\big|_{x=1} = 0$ ③

$$F = \frac{1}{y}\sqrt{1+y'^2}$$

معادلة أولر

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0$$

$$F - y' F_{y'} = C_1 \quad ①$$

$$F_{y'} = \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}}$$

نعوض في ①

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = C_1$$

وحد المقامات

$$(1+y'^2) - y'^2 = C_1 y\sqrt{1+y'^2}$$

$$1 = C_1 y \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{1}{C_1^2 y^2} = 1 + y'^2$$

$$y'^2 = \frac{1 - C_1^2 y^2}{C_1^2 y^2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}}{C_1 y} \Rightarrow \frac{C_1 y\, dy}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}} = dx$$

$$\frac{1}{-2C_1} \frac{-2C_1^2 y\, dy}{\sqrt{1 - C_1^2 y^2}} = dx$$

$$\frac{-1}{C_1} \sqrt{1 - C_1^2 y^2} = x + C_2$$

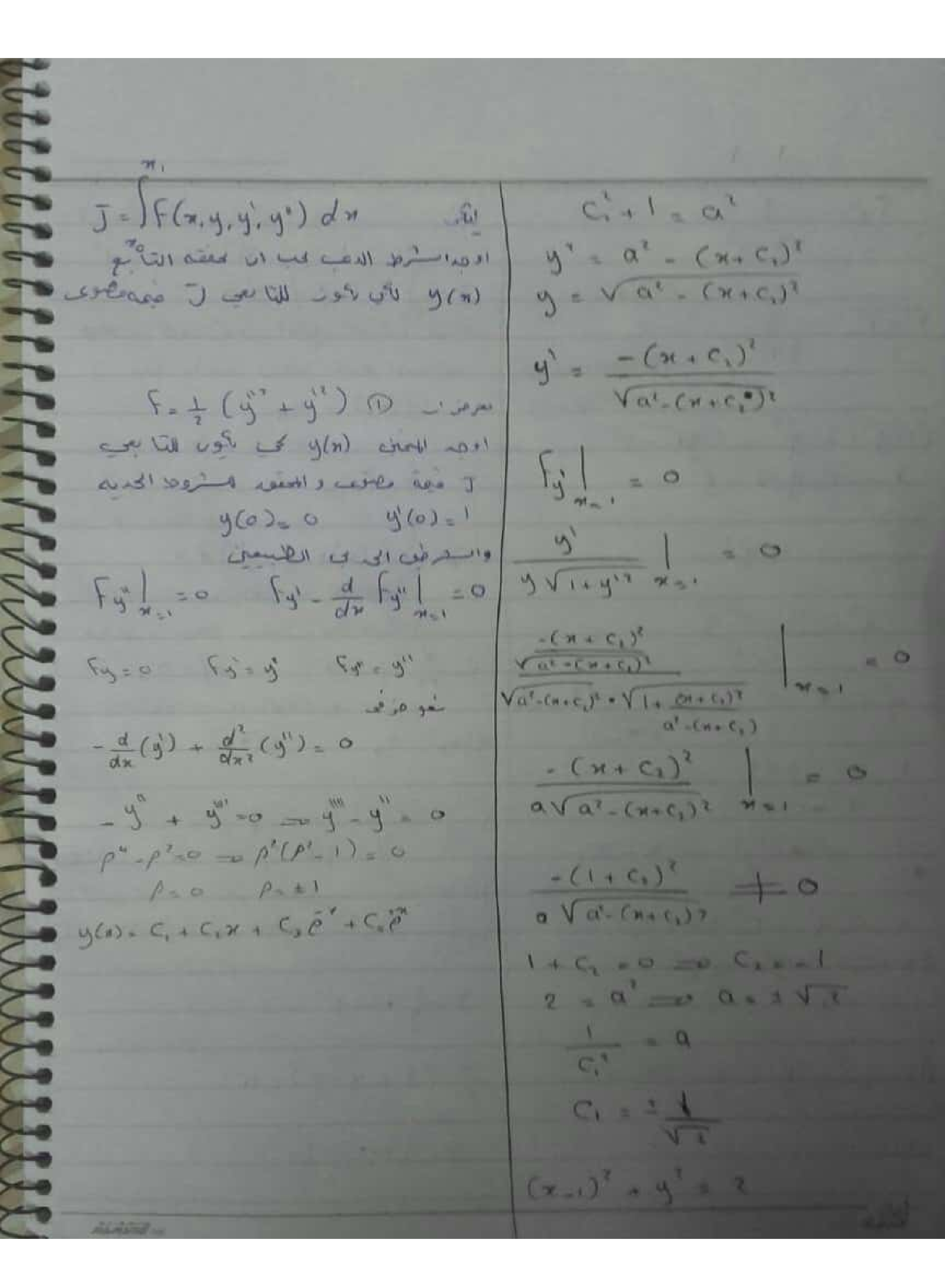
$$1 - C_1^2 y^2 = C_1^2 (x + C_2)^2$$

$$(x + C_2)^2 + y^2 = \frac{1}{C_1^2}$$

$$\frac{1}{C_1^2} = a$$

$$\boxed{(x + C_2)^2 + y^2 = a} \quad (4)$$

Scanned by CamScanner



مثال

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'')\, dx$$

اوجد الشرط الذي يجب ان يحققه التابع $y(x)$ لكي يكون للتابعي J [illegible]

نعوض $F = \frac{1}{2}\left(y''^2 + y'^2\right)$ ①

اوجد المنحني كي يكون التابعي J قيمة [illegible] والمحقق الشروط الحدية

$y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1$

والشرط الحدي الطبيعي

$$F_{y''}\Big|_{x=1} = 0 \qquad F_{y'} - \frac{d}{dx} F_{y''}\Big|_{x=1} = 0$$

$F_y = 0 \qquad F_{y'} = y' \qquad F_{y''} = y''$

نعوض

$$-\frac{d}{dx}(y') + \frac{d^2}{dx^2}(y'') = 0$$

$$-y'' + y'''' = 0 \Rightarrow y'''' - y'' = 0$$

$$p^4 - p^2 = 0 \Rightarrow p^2(p^2 - 1) = 0$$

$$p = 0 \qquad p = \pm 1$$

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{x}$$

$$C_1^2 + 1 = a^2$$

$$y^2 = a^2 - (x + C_2)^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - (x + C_2)^2}$$

$$y' = \frac{-(x + C_2)^2}{\sqrt{a^2 - (x + C_2)^2}}$$

$$F_{y'}\Big|_{x=1} = 0$$

$$\frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}}\Bigg|_{x=1} = 0$$

$$\frac{\dfrac{-(x + C_2)^2}{\sqrt{a^2 - (x + C_2)^2}}}{\sqrt{a^2 - (x + C_2)^2} \cdot \sqrt{1 + \dfrac{(x + C_2)^2}{a^2 - (x + C_2)}}}\Bigg|_{x=1} = 0$$

$$\frac{-(x + C_2)^2}{a\sqrt{a^2 - (x + C_2)^2}}\Bigg|_{x=1} = 0$$

$$\frac{-(1 + C_2)^2}{a\sqrt{a^2 - (x + C_2)^2}} = 0$$

$$1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -1$$

$$2 = a^2 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{C_1^2} = a$$

$$C_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2$$